

Formes i símbols modulars clàssics

FRANCESC GISPERT

Barcelona, 16 de març i 6 d'abril de 2016

Resum

Aquest document conté les notes que vaig preparar per a les dues presentacions introductòries del seminari sobre símbols modulars sobreconvergens¹ que va tenir lloc a Barcelona durant la primavera del 2016. Es tracta d'un recordatori de la teoria clàssica de formes modulars i d'una introducció als símbols modulars clàssics. Aquestes notes no contenen cap resultat original.

1 Formes modulars

Considerem el *semiplà superior*

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

amb l'acció (per l'esquerra)

$$\text{GL}_2^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$

donada per les transformacions de Möbius

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Aquesta acció no depèn del determinant de la matriu (sempre i quan sigui positiu per tal de preservar l'orientació de \mathbb{C} i de mantenir \mathbb{H} estable); de fet, no canvia en multiplicar la matriu per escalars i, per tant, tenim una acció de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ sobre \mathbb{H} . Estudiarem sobretot l'acció induïda de subgrups $\Gamma \subset \text{SL}_2(\mathbb{R})$. En aquest context, escriurem $\bar{\Gamma}$ per a referir-nos a la imatge de Γ a $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Anàlogament, $\bar{\gamma}$ serà la imatge d'un element $\gamma \in \Gamma$ a $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Definició 1. Sigui N un nombre enter positiu. El subgrup de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

¹Vull agrair a en Santi Molina la feina d'organitzar el seminari.

s'anomena *subgrup de congruència principal de nivell N*. Un subgrup $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es diu *de congruència de nivell N* si

$$\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

(En particular, en aquest cas $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] < \infty$.)

Exemple 2. Els subgrups de congruència més importants són

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

i

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}.$$

A partir d'ara, Γ serà sempre un subgrup de congruència de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (més endavant ens centrarem només en $\Gamma_0(N)$).

Definició 3. Un *domini fonamental* per a Γ és un tancat D de \mathbb{H} que conté un representant de cada òrbita de l'acció $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}$ i tal que, si hi ha dos representants d'una mateixa òrbita en D , tots dos han de ser en la frontera. (Normalment els volem conexas.)

Teorema 4. *Siguin*

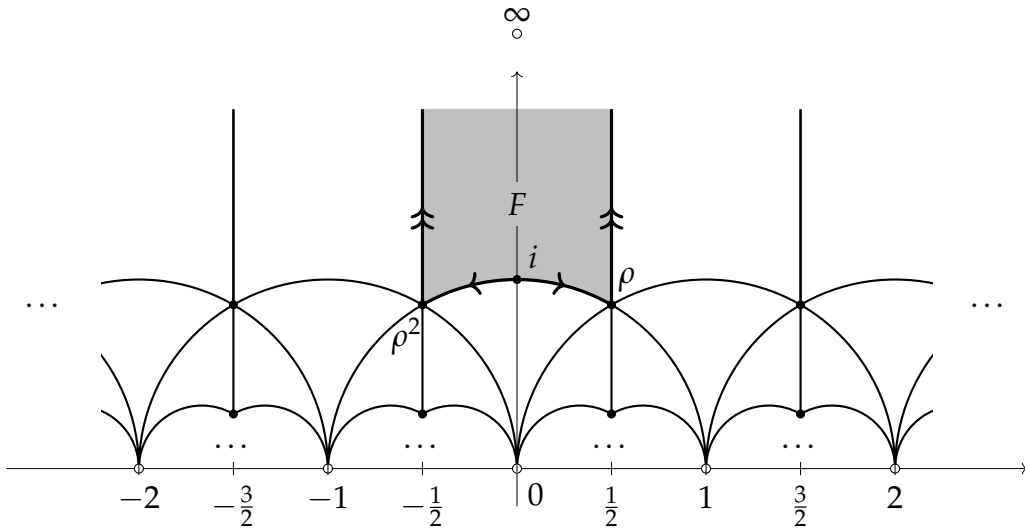
$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i sigui $F = \{z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1 \text{ i } |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$.

- (1) $\langle S, T \rangle = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
- (2) F és un domini fonamental per a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ amb les identifikacions que mostra el gràfic 1.
- (3) Si $z \in F$, l'estabilitzador $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})_z$ és trivial llevat dels següents casos:
 - $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})_i = \langle \bar{S} \rangle$ (ordre 2),
 - $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})_\rho = \langle \overline{TS} \rangle$ (ordre 3) i
 - $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})_{\rho^2} = \langle \overline{ST} \rangle$ (ordre 3).

Aquest teorema permet trobar dominis fonamentals de Γ coneixent un sistema de representants de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \Gamma$.

Topològicament, el domini fonamental F amb els costats identificats segons l'acció de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ és una esfera menys un punt, tal com es pot veure al gràfic 2. Per tal de compactificar aquesta superfície, doncs, hi afegim un punt a l'infinit

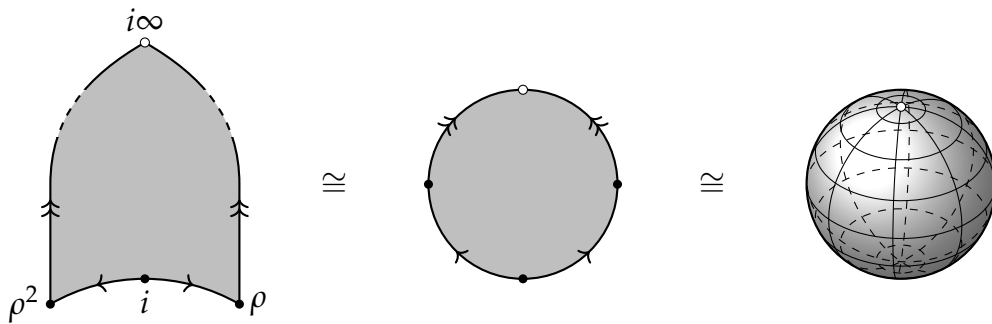


Gràfic 1: El domini fonamental F i uns quants traslladats.

(juntament amb tots els seus traslladats per $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$). Definim així el *semiplà superior estès*

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \sqcup \mathbb{Q} \sqcup \{\infty\}$$

i hi estenem també l'acció de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de la manera òbvia. Observem que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ actua transitivament sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, les *puntes* o *cúspides*, per la identitat de Bézout. El conjunt \mathbb{H}^* es pot dotar d'una topologia que estén la topologia euclidiana a \mathbb{H} .



Gràfic 2: La superfície (topològica) $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}$.

Considerem l'acció (per la dreta) de pes $k \in \mathbb{Z}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sobre funcions donada per

$$f \left[\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right]_k (z) \right] = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{k/2} \cdot (cz + d)^{-k} \cdot f \left(\frac{az + b}{cz + d} \right).$$

Definició 5. Una funció meromorfa $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ es diu *dèbilment modular* per a Γ de pes k si

$$f|[\gamma]_k = f \quad \text{per a tot } \gamma \in \Gamma.$$

Com que

$$\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \quad \text{per a algun } h \in \mathbb{N},$$

tota funció *dèbilment modular* $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ és h -periòdica. Per tant, f admet un desenvolupament en sèrie de Fourier

$$\widehat{f}_\infty(q_h) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n q_h^n, \quad \text{on } q_h = e^{2\pi iz/h}.$$

(A vegades escriurem $c_n(f)$ en lloc de c_n per a l'enèsim coeficient de Fourier de f .) Es diu que f *satisfà una condició* (ser meromorfa, ser holomorfa, anul·lar-se, etc.) en $z = \infty$ si \widehat{f}_∞ la satisfà en $q_h = 0$. Per a una altra punta $s \in \mathbb{Q}$, sabem que $s = \alpha(\infty)$ per a algun $\alpha \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Aleshores, es diu que f *satisfà una condició en* $z = s$ si $f|[\alpha]_k$ la satisfà en $z = \infty$. (Hom pot comprovar que això no depèn de la matriu α triada.)

Definició 6. Una *forma modular* per a Γ de pes $k \in \mathbb{Z}$ és una funció $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ *dèbilment modular* per a Γ de pes k que a més a més és holomorfa en \mathbb{H} i en les puntes. Si a sobre f s'anul·la en les puntes, es diu que f és una *forma cuspidal* o *parabòlica*.

Exemple 7. Les *sèries d'Eisenstein*

$$G_{2k}(z) = \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(mz + n)^{2k}}$$

són formes modulares per a $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ de pes $2k$ si $k > 1$.

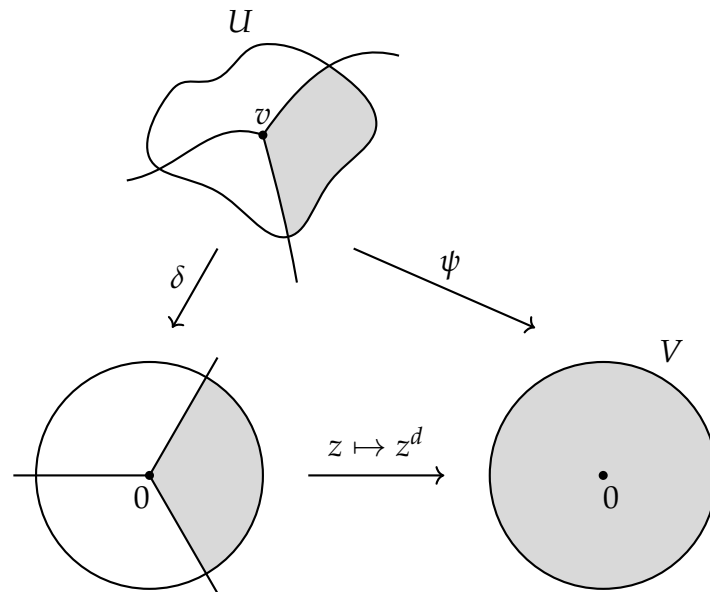
Hom pot dotar el quocient $\overline{\Gamma} \backslash \mathbb{H}$ d'una estructura de superfície de Riemann i aquesta admet una compactificació corresponent a $\overline{\Gamma} \backslash \mathbb{H}^*$.

Proposició 8. Per a cada $z \in \mathbb{H}^*$ hi ha un entorn obert U de z tal que

$$\overline{\Gamma}_z = \{ \overline{\gamma} \in \overline{\Gamma} : \overline{\gamma}(U) \cap U \neq \emptyset \}.$$

Aquesta proposició permet definir les cartes d'un atlas de $\overline{\Gamma} \backslash \mathbb{H}^*$ de manera que la superfície resultant sigui de Hausdorff. Sigui $\pi: \mathbb{H}^* \rightarrow \overline{\Gamma} \backslash \mathbb{H}^*$ la projecció canònica. Donat $z \in \mathbb{H}^*$, considerem un entorn obert U de z amb la propietat que $\overline{\Gamma}_z = \{ \overline{\gamma} \in \overline{\Gamma} : \overline{\gamma}(U) \cap U \neq \emptyset \}$, com a la proposició 8.

- Si $\bar{\Gamma}_z$ és trivial, la restricció $\pi|_U: U \rightarrow \bar{\Gamma} \setminus U$ és un homeomorfisme i el seu invers és una carta al voltant de $\pi(z)$.
- Si $z \in \mathbb{H}$ i $\bar{\Gamma}_z$ no és trivial, z ha de ser necessàriament $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ -equivalent o bé a i o bé a ρ . En aquest cas, l'estabilitzador $\bar{\Gamma}_z$ té ordre $d = 2$ o 3 i podem construir una carta de la manera esbossada al gràfic 3 (çò és, identificant d sectors al voltant del punt $v = \pi(z)$).



Gràfic 3: Carta per a un punt $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ -equivalent a i o a ρ .

- Si $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, z és $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ -equivalent a ∞ . En tal cas, l'estabilitzador $\bar{\Gamma}_z$ és cíclic d'ordre infinit i podem construir una carta de la manera esbossada al gràfic 4 (çò és, identificant els infinits sectors equivalents al voltant del punt $v = \pi(z)$).

Definició 9. Les superfícies de Riemann $Y(\Gamma) = \bar{\Gamma} \setminus \mathbb{H}$ i $X(\Gamma) = \bar{\Gamma} \setminus \mathbb{H}^*$ (amb l'estructura donada per les cartes indicades més amunt) s'anomenen *corbes modulars* per a Γ .

Sigui $\Omega^1(X(\Gamma))$ l'espai de les 1-formes diferencials holomorfes de $X(\Gamma)$. Si $\omega \in \Omega^1(X(\Gamma))$, aleshores $\pi^*(\omega)$ es pot escriure de la forma

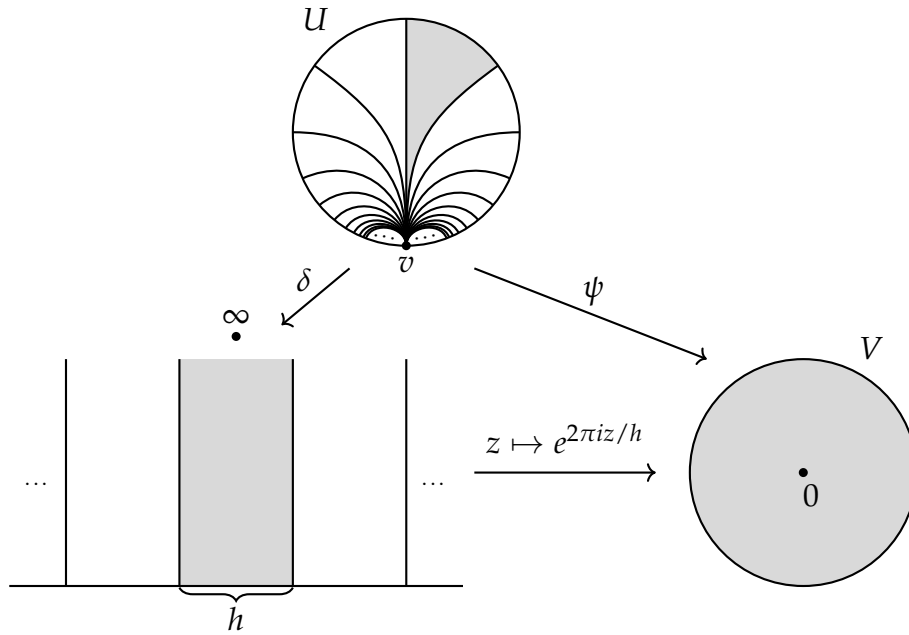
$$f(z) dz,$$

on la funció $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ és holomorfa. A més a més, per la invariància per Γ ,

$$f(\gamma(z)) d(\gamma(z)) = f(z) dz \quad \text{per a tot } \gamma \in \Gamma,$$

la qual cosa implica que

$$f|[\gamma]_2 = f \quad \text{per a tot } \gamma \in \Gamma.$$



Gràfic 4: Carta per a un punt $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ -equivalent a ∞ .

Finalment, prenem el mínim $h \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

i escrivim

$$f(z) = \widehat{f}_\infty(q_h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q_h^n, \quad \text{on } q_h = e^{2\pi iz/h}.$$

Com que

$$dq_h = q_h \frac{2\pi i}{h} dz,$$

resulta que

$$f(z) dz = \widehat{f}_\infty(q_h) \cdot \frac{h}{2\pi i} \cdot \frac{dq_h}{q_h}$$

i aquesta forma diferencial només pot ser holomorfa si f s'anul·la en ∞ . Amb un càlcul similar per a les altres puntes, hom comprova que hi ha una correspondència bijectiva entre 1-formes holomorfes de $X(\Gamma)$ i formes cuspidals de pes 2 per a Γ .

L'espai $M_k(\Gamma)$ de les formes modulars per a Γ de pes k (així com el subespai $S_k(\Gamma)$ de les formes cuspidals) és un espai vectorial complex. Hi ha uns operadors lineals destacats que hi actuen: els *operadors de Hecke*. A continuació en donarem una descripció explícita en els casos que més ens interessin.

Sigui $N \in \mathbb{N}$, sigui S^+ un subgrup no trivial de \mathbb{Z} i sigui S^\times un subgrup de

$(\mathbb{Z} / N\mathbb{Z})^\times$. Per a cada $n \in \mathbb{N}$ definim un conjunt

$$\Delta^n(N, S^\times, S^+) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) : a \in S^\times, b \in S^+, N \mid c \text{ i } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = n \right\}.$$

Definició 10. Si $\Gamma = \Delta^1(N, S^\times, S^+)$ i $n \in \mathbb{N}$, l'operador de Hecke T_n actua sobre $M_k(\Gamma)$ segons

$$T_n f = n^{k/2-1} \sum_{\Gamma\beta \in \Gamma \backslash \Delta^n(N, S^\times, S^+)} f|[\beta]_k.$$

Exemple 11. Si $\Gamma = \Gamma_0(N) = \Delta^1(N, (\mathbb{Z} / N\mathbb{Z})^\times, \mathbb{Z})$, aleshores

$$T_n f = n^{k/2-1} \sum_{\substack{a \geq 1 \\ (a, N)=1}} \sum_{ad=n} \sum_{0 \leq b < d} f|[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}]_k.$$

Així, si

$$f(z) = \widehat{f}_\infty(q) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m q^m, \quad \text{on } q = e^{2\pi iz},$$

la sèrie de Fourier de $T_n f$ ve donada per

$$T_n f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{a \geq 1 \\ (n, m)=1}} \chi_N(a) a^{k-1} c_{mn/a^2} \right) q^m.$$

En particular, $c_1(T_n f) = c_n(f)$.

2 Descripció explícita de $S_2(\Gamma_0(N))$

El nostre objectiu ara és trobar un mètode per a calcular explícitament els coeficients de Fourier d'una base de $S_k(\Gamma_0(N))$ (el seu *complementari* en $M_k(\Gamma_0(N))$) admet una base donada per sèries d'Eisenstein generalitzades, que es poden construir explícitament amb altres mètodes que no exposarem aquí).

Per a fer-ho, considerem l'acció dels operadors de Hecke sobre $S_k(\Gamma_0(N))$. Sigui \mathbb{T} la subàlgebra de $\text{End}(S_k(\Gamma_0(N)))$ generada pels diversos T_n , $n \in \mathbb{N}$, i sigui $\mathbb{T}_{\mathbb{C}} = \mathbb{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$.

Proposició 12. *L'aplicació*

$$\begin{aligned} S_k(\Gamma_0(N)) \times \mathbb{T}_{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, T) &\longmapsto c_1(Tf) \end{aligned}$$

és un aparellament perfecte i, per tant, defineix un isomorfisme entre els espais vectorials complexos $S_k(\Gamma_0(N))$ i $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$.

Demostració. L'aparellament és clarament bilineal.

Si $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ i $c_1(Tf) = 0$ per a tot $T \in \mathbb{T}_{\mathbb{C}}$, en particular

$$c_n(f) = c_1(T_n f) = 0 \quad \text{per a tot } n \in \mathbb{N}$$

i, per tant, $f = 0$.

Si $T \in \mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ i $c_1(Tf) = 0$ per a tot $f \in S_k(\Gamma_0(N))$, llavors per a un $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ fix

$$c_n(Tf) = c_1(T_n Tf) = c_1(TT_n f) = 0 \quad \text{per a tot } n \in \mathbb{N}.$$

Per tant, $Tf = 0$. Com que l'argument serveix per a qualsevol $f \in S_k(\Gamma_0(N))$, concloem que $T = 0$ en $\text{End}(S_k(\Gamma_0(N)))$. \square

Donat $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$, podem recuperar l'element de $S_k(\Gamma_0(N))$ corresponent fàcilment: es tracta de

$$f_{\varphi}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(T_n) q^n, \quad \text{on } q = e^{2\pi iz}.$$

En definitiva, podrem calcular $S_k(\Gamma_0(N))$ si coneixem bé $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$. Però l'acció dels operadors de Hecke és definida sobre $S_k(\Gamma_0(N))$, així que tenim un argument circular. Per tal de solucionar-ho, introduïrem un nou conjunt d'objectes més simple que conté una còpia isomorfa de $S_k(\Gamma_0(N))$ (com a $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ -mòdul) i descriurem l'acció dels operadors de Hecke allà.

Restringim-nos al cas de pes $k = 2$, que és el més simple de tots. Com hem vist abans, hi ha una bijecció natural entre $S_2(\Gamma)$ i $\Omega^1(X(\Gamma))$. D'altra banda, com que $X(\Gamma)$ és una superfície de Riemann compacta, hi ha un aparellament no degenerat

$$\begin{aligned} H_1(X(\Gamma); \mathbb{R}) \times \Omega^1(X(\Gamma)) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \left(\sum_{i \in I} \lambda_i [a_i], \omega \right) &\longmapsto \sum_{i \in I} \lambda_i \int_{a_i} \omega \end{aligned}$$

que dóna un isomorfisme entre $H_1(X(\Gamma); \mathbb{R})$ i $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega^1(X(\Gamma)), \mathbb{C})$, ambdós vistos com a espais vectorials reals. (Si g és el gènere de la superfície de Riemann $X(\Gamma)$, es comprova pel teorema d'Abel–Jacobi que la imatge de $H_1(X(\Gamma); \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ a $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega^1(X(\Gamma)), \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g \cong \mathbb{R}^{2g}$ és un reticle no degenerat, de rang màxim, i per tant $H_1(X(\Gamma); \mathbb{R})$ és isomorf a tot $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega^1(X(\Gamma)), \mathbb{C})$.) En aquest sentit, $H_1(X(\Gamma); \mathbb{R})$ és dual de $S_2(\Gamma)$. Definim així per al cas $\Gamma = \Gamma_0(N)$ una acció dels operadors de Hecke sobre $H_1(X(\Gamma); \mathbb{R})$ que commuti amb l'aparellament donat per la integració de formes al llarg de cicles.

3 Símbols modulars

Caldrà, doncs, estudiar $H_1(X(\Gamma); \mathbb{Z})$. Per a això, considerem camins en \mathbb{H}^* i els projectem amb $\pi: \mathbb{H}^* \rightarrow X(\Gamma)$. Com que hi voldrem integrar, suposarem que tots els camins són de classe C^1 a trossos i continguts en \mathbb{H} (excepte potser els extrems). A més a més, si un camí acaba en ∞ , suposarem que el camí obtingut en fer el canvi de variables $z \mapsto e^{2\pi iz}$ també és de classe C^1 a trossos (i anàlogament per a les altres puntes).

Lema 13. *Siguin $r, s \in \mathbb{H}^*$. Qualsevol dos camins de r a s en \mathbb{H}^* són homotòpics; per tant, les seves projeccions en $X(\Gamma)$ també ho són.*

Definició 14. *Siguin $r, s \in \mathbb{H}^*$. El símbol modular $\{r, s\}$ per a Γ és l'element de $H_1(X(\Gamma); \mathbb{R})$ associat a*

$$\left(\omega \mapsto \int_r^s \pi^*(\omega) \right) \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega^1(X(\Gamma)), \mathbb{C})$$

mitjançant l'aparellament d'integració.

Pensarem en el símbol modular $\{r, s\}$ com un camí geodèsic entre r i s . Vegeu-ne exemples al gràfic 5.

Ens centrarem sobretot en el cas en què $r, s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ (és a dir, considerarem només camins entre les puntes): d'aquesta manera, $\{r, s\} \in H_1(X(\Gamma), C(\Gamma); \mathbb{Z})$, on $C(\Gamma) = \pi(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))$. Si $\pi(r) = \pi(s)$, el camí obtingut és tancat i, per tant, $\{r, s\} \in H_1(X(\Gamma); \mathbb{Z})$.

El grup $GL_2^+(\mathbb{Q})$ actua sobre l'espai dels símbols modulars per a Γ segons

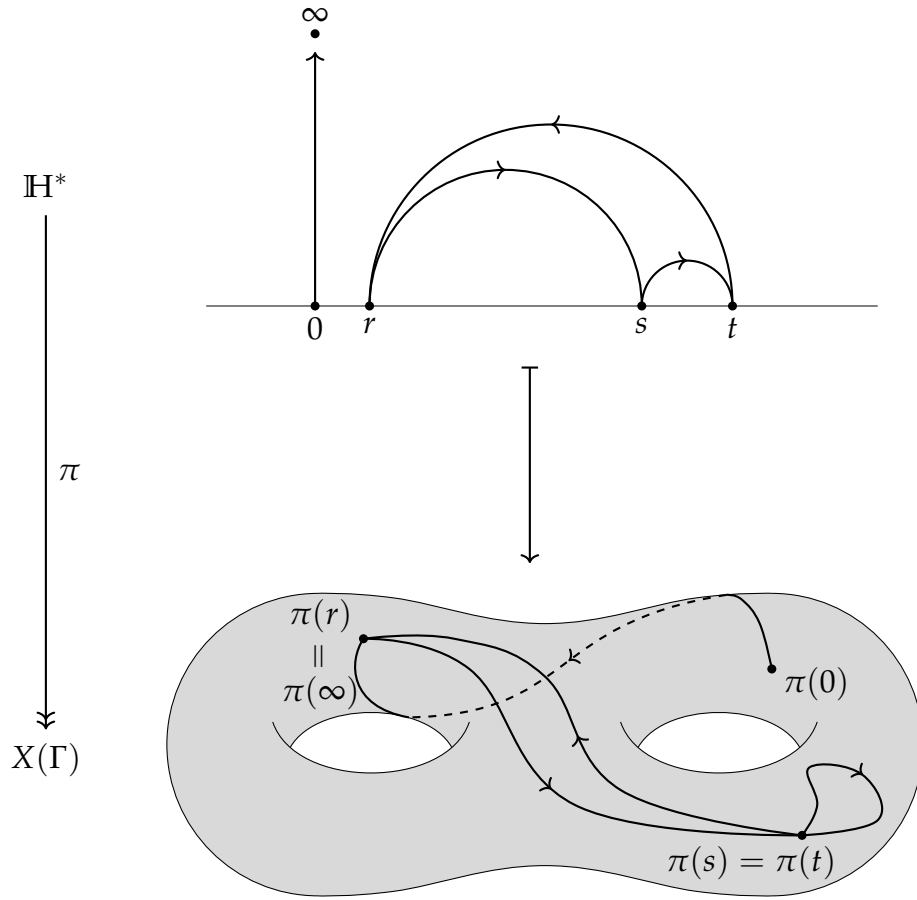
$$\alpha \cdot \{r, s\} = \{\alpha(r), \alpha(s)\}.$$

Proposició 15. *Siguin $r, s, t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ i siguin $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Els símbols modulars satisfan les següents identitats:*

- (1) $\{r, r\} = 0$;
- (2) $\{r, s\} + \{s, r\} = 0$;
- (3) $\{r, s\} + \{s, t\} + \{t, r\} = 0$;
- (4) $\gamma\{r, s\} = \{r, s\}$;
- (5) $\{r, \gamma(r)\} = \{s, \gamma(s)\}, i$
- (6) $\{r, \gamma\gamma'(r)\} = \{r, \gamma(r)\} + \{r, \gamma'(r)\}$.

Demostració. Les propietats (1) a (4) són immediates de la definició i de les propietats de les integrals i el teorema de Stokes. Pel que fa a les propietats (5) i (6),

$$\begin{aligned} \{r, \gamma(r)\} &= \{r, s\} + \{s, \gamma(s)\} + \{\gamma(s), \gamma(r)\} \\ &= \{r, s\} + \{s, \gamma(s)\} + \{s, r\} = \{s, \gamma(s)\} \end{aligned}$$



Gràfic 5: Camins que representen uns quants símbols modulars.

i

$$\{r, \gamma\gamma'(r)\} = \{r, \gamma(r)\} + \{\gamma(r), \gamma(\gamma'(r))\} = \{r, \gamma(r)\} + \{r, \gamma'(r)\}. \quad \square$$

Teorema 16. Sigui $r \in \mathbb{H}^*$. L'aplicació

$$\begin{aligned} \Phi: \bar{\Gamma} &\longrightarrow H_1(X(\Gamma); \mathbb{Z}) \\ \bar{\gamma} &\longmapsto \{r, \gamma(r)\} \end{aligned}$$

és un epimorfisme de grups amb nucli generat pels commutadors i pels elements dels subgrups estabilitzadors de $\bar{\Gamma}$ respecte dels punts de \mathbb{H}^* . A més a més, Φ no depèn del punt r triat.

Demostració. Els punts (5) i (6) de la proposició 15 demostren que Φ és un morfisme de grups i que no depèn de la tria de r .

Sigui $\mathbb{H}^0 = \{z \in \mathbb{H} : \bar{\Gamma}_z \text{ és trivial}\}$ i sigui $Y^0(\Gamma) = \pi(\mathbb{H}^0)$. Podem suposar que $r \in \mathbb{H}^0$. Com que $\pi|_{\mathbb{H}^0}: \mathbb{H}^0 \rightarrow Y^0(\Gamma)$ és un recobriment no ramificat, hi ha un epimorfisme

$$\Psi: \pi_1(Y^0(\Gamma), \pi(r)) \longrightarrow \bar{\Gamma}$$

que envia un camí $[\theta] \in \pi_1(Y^0(\Gamma), \pi(r))$ a l'únic element $\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}$ amb la propietat que θ admet un aixecament a un camí entre r i $\bar{\gamma}(r)$ en \mathbb{H}^0 . La composició $\Phi \circ \Psi$ és el morfisme natural

$$\pi_1(Y^0(\Gamma), \pi(r)) \longrightarrow H_1(X(\Gamma); \mathbb{Z}),$$

que pel teorema de Hurewicz sabem que és exhaustiu. A més a més, el seu nucli és generat pels commutadors i pels llaços al voltant dels punts de $X(\Gamma) \setminus Y^0(\Gamma)$. \square

El teorema anterior mostra que no calen tants símbols modulars per a generar el grup d'homologia de $X(\Gamma)$. Per tant, ens centrarem en els símbols d'una determinada forma.

Definició 17. Els símbols modulars (per a Γ) distingits són els de la forma $\gamma\{0, \infty\}$ per a algun $\gamma \in \Gamma$.

Teorema 18 (Manin). Siguin $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m$ un sistema de representants de les classes laterals per la dreta de $\bar{\Gamma}$ a $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Tot element $[a] \in H_1(X(\Gamma); \mathbb{Z})$ es pot representar com

$$[a] = \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \alpha_j\{0, \infty\} \quad \text{amb } \lambda_j \in \mathbb{Z} \text{ per a tot } j \in \{1, \dots, m\}$$

de manera que

$$\partial[a] = \sum_{j=1}^m [\{\pi(\alpha_j(\infty))\} - \{\pi(\alpha_j(0))\}] = 0 \quad \text{a } Z_0(X(\Gamma)).$$

Demostració. Podem expressar $[a] = \{0, \gamma(0)\}$ per a algun $\gamma \in \Gamma$. Si $\gamma(0) = \infty$, no cal fer res. Si no, escrivim $\gamma(0) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ amb $(p, q) = 1$ i $q > 0$. Considerem la representació com a fracció contínua

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

i siguin

$$\frac{p_{-2}}{q_{-2}} = \frac{0}{1}, \quad \frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{1}{0}, \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}, \quad \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad \dots, \quad \frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$$

els convergents successius (tots escrits en forma reduïda i els dos primers inclosos formalment). En particular,

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^{i-1}$$

i per tant

$$\begin{pmatrix} (-1)^{i-1} p_i & p_{i-1} \\ (-1)^{i-1} q_i & q_{i-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}$$

per a $-1 \leq i \leq n$. Aleshores,

$$\left\{0, \frac{p}{q}\right\} = \sum_{i=-1}^n \left\{\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}, \frac{p_i}{q_i}\right\} = \sum_{i=-1}^n \begin{pmatrix} (-1)^{i-1} p_i & p_{i-1} \\ (-1)^{i-1} q_i & q_{i-1} \end{pmatrix} \{0, \infty\}$$

i obtenim la representació desitjada canviant aquestes matrius pels representants adequats. \square

Així, doncs, amb els símbols modulars distingits en fem prou per a representar l'homologia de $X(\Gamma)$. De fet, aquesta idea permet considerar sols uns quants d'aquests símbols.

4 Símbols de Manin

Considerem

$$\sigma = S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \tau = TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquestes dues matrius generen $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ i satisfan que $\sigma^2 = \tau^3 = -1$. Com que $\sigma\{0, \infty\} = \{\infty, 0\}$, $\tau\{0, \infty\} = \{\infty, 1\}$ i $\tau\{\infty, 1\} = \{1, 0\}$, resulta que

$$\alpha\{0, \infty\} + \alpha\sigma\{0, \infty\} = 0 \quad \text{i} \quad \alpha\{0, \infty\} + \alpha\tau\{0, \infty\} + \alpha\tau^2\{0, \infty\} = 0$$

per a tot $\alpha \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Aquest sistema de relacions és complet en cert sentit, tal com veurem a continuació.

Definició 19. Siguin $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m$ un sistema de representants de les classes laterals per la dreta de $\bar{\Gamma}$ a $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Els *símbols de Manin per a Γ* són símbols formals $(\bar{\alpha}_j)$ per a $j \in \{1, \dots, m\}$. Estenem aquesta notació i definim

$$(\bar{\alpha}) = (\bar{\Gamma}\bar{\alpha}) = (\bar{\alpha}_j) \quad \text{si} \quad \bar{\Gamma}\bar{\alpha} = \bar{\Gamma}\bar{\alpha}_j.$$

(És a dir, hi ha un símbol de Manin per a cada classe lateral.)

Hi ha una acció per la dreta de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ sobre els símbols de Manin donada per

$$(\bar{\alpha}) \cdot \beta = (\overline{\alpha\beta}).$$

Definició 20.

- (1) Sigui M el grup abelià lliure generat pels símbols de Manin per a Γ . El grup C de les *cadenes de Manin per a Γ* és el quocient de M pel subgrup generat pels elements $(\bar{\alpha}) + (\bar{\alpha})\sigma$ i pels elements $(\bar{\alpha})$ tals que $(\bar{\alpha}) = (\bar{\alpha})\sigma$.

(2) L'operador vora de Manin és l'aplicació $\partial: C \rightarrow Z_0(X(\Gamma))$ definida per

$$\partial(\bar{\alpha}) = \{\pi(\bar{\alpha}(\infty))\} - \{\pi(\bar{\alpha}(0))\}$$

i estesa per linealitat. El grup de cicles de Manin per a Γ és $Z = \text{Ker}(\partial)$.

(3) El subgrup B de les vores de Manin per a Γ és el subgrup de C generat pels elements $(\bar{\alpha}) + (\bar{\alpha})\tau + (\bar{\alpha})\tau^2$ i pels elements $(\bar{\alpha})$ tals que $(\bar{\alpha}) = (\bar{\alpha})\tau$.

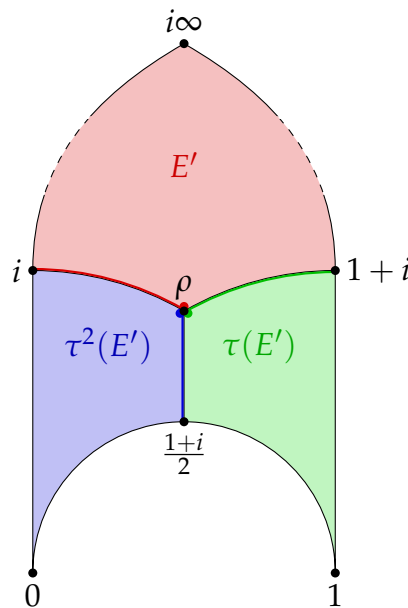
Teorema 21. L'aplicació \mathbb{Z} -lineal

$$\begin{aligned} \zeta: Z / B &\longrightarrow H_1(X(\Gamma); \mathbb{Z}) \\ (\bar{\alpha}) &\longmapsto \{\bar{\alpha}(0), \bar{\alpha}(\infty)\} \end{aligned}$$

és un isomorfisme de grups.

Idea de la demostració. Hom pot comprovar rutinàriament que B és un subgrup de Z i que ζ és una aplicació ben definida en vista de les relacions amb σ i τ descrites al començament de la secció. L'exhaustivitat de ζ és conseqüència del teorema 18.

La sola part complicada és, doncs, provar que ζ és una aplicació injectiva. A aquest efecte descriurem $H_1(X; \mathbb{Z})$ mitjançant un complex de cel·les (és a dir, emprant homologia cel·lular).



Gràfic 6: El triangle E descompost en dominis fonamentals.

Considerem les següents regions de \mathbb{H}^* , il·lustrades al gràfic 6:

- E és l'interior del triangle $\triangle\langle 0, 1, \infty \rangle$ (és a dir, tota l'àrea pintada al gràfic 6), i
- E' és l'interior del quadrilàter $\square\langle i, \rho, 1+i, \infty \rangle$ més el segment $\langle i, \rho \rangle$ tret de l'extrem $\{i\}$ (és a dir, l'àrea de color vermell al gràfic 6).

Observem que $E = E' \cup \tau(E') \cup \tau^2(E')$ i que $E' \cap \tau(E') \cap \tau^2(E') = \{\rho\}$. A més a més, E' és un domini fonamental de l'acció de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sobre \mathbb{H}^* . De fet, $\overline{E'}$ és format per la meitat dreta més la meitat esquerra traslladada una unitat cap a la dreta del domini fonamental F del teorema 4 (vegeu el gràfic 1). L'acció de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ identifica parells de costats del quadrilàter E' ; tanmateix no hi ha identificacions entre parells de punts d'un mateix costat. Per tant, la projecció π indueix immersions en $X(\Gamma)$ de cada semicostat i cada semimitjana del triangle E .

Amb aquestes observacions clau, finalment podem construir el complex de cel·les 2-dimensional (naturalment homeomorf a $X(\Gamma)$) següent.

- (i) Les 0-cel·les són les imatges per π dels vèrtexs i dels punts mitjans dels costats dels triangles $\alpha(E)$ per a tot $\bar{\alpha} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.
- (ii) Les 1-cel·les són les imatges per π dels semicostats, orientats del vèrtex cap al punt mitjà, dels triangles $\alpha(E)$ per a tot $\bar{\alpha} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. És a dir, cadascuna d'aquestes cel·les és de la forma $e_1((\bar{\alpha})) = \pi(\langle \alpha(\infty), \alpha(i) \rangle)$.
- (iii) Les 2-cel·les són les imatges per π dels triangles $\alpha(E)$ per a tot $\bar{\alpha} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

N'hi ha de dues menes:

- si $(\bar{\alpha}) = (\bar{\alpha})\tau$, tenim una cel·la $e_2((\bar{\alpha})) = \pi(\alpha(E'))$ amb vora

$$\partial e_2((\bar{\alpha})) = e_1((\bar{\alpha})) - e_1((\bar{\alpha})\sigma),$$

mentre que

- si $(\bar{\alpha}) \neq (\bar{\alpha})\tau$, tenim una cel·la $e_2((\bar{\alpha})) = \pi(\alpha(E))$ amb vora

$$\partial e_2((\bar{\alpha})) = \sum_{j=0}^2 \left[e_1((\bar{\alpha})\tau^j) - e_1((\bar{\alpha})\tau^j\sigma) \right].$$

Hom pot provar que l'aplicació $(\bar{\alpha}) \mapsto e_1((\bar{\alpha})\sigma) - e_1((\bar{\alpha}))$ indueix un isomorfisme

$$\mathbb{Z} / B \xrightarrow{\cong} Z_1^{\mathrm{cel}}(X) / B_1^{\mathrm{cel}}(X) \cong H_1(X; \mathbb{Z}). \quad \square$$

Hem obtingut, doncs, una descripció molt simple de $H_1(X(\Gamma); \mathbb{Z})$. Particularitzant per a $\Gamma = \Gamma_0(N)$, encara la podem simplificar més.

Proposició 22. *Hi ha una bijecció entre $\Gamma_0(N) / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ i*

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Z} / N\mathbb{Z}) = \{ (c : d) : c, d \in \mathbb{Z} / N\mathbb{Z} \text{ i } (c, d, N) = 1 \}$$

(on $(c : d) = (uc : ud)$ per a tot $u \in (\mathbb{Z} / N\mathbb{Z})^\times$). Aquesta bijecció envia la classe lateral

$$\Gamma_0(N) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a l'element $(c : d)$.

En aquest cas, doncs, n'hi ha prou amb combinacions lineals de parelles de nombres mòdul N per a descriure un objecte tan complicat com $H_1(X_0(N); \mathbb{R})$ (i, en conseqüència, també $S_2(\Gamma_0(N))$).

5 Una altra versió dels símbols modulars

Tornem a considerar un subgrup de congruència Γ qualsevol. Una vegada entesa la teoria dels símbols modulars i com es fa servir per a calcular $H_1(X(\Gamma); \mathbb{Z})$, podem presentar una definició alternativa del grup dels símbols modulars per a Γ . Aquests símbols són formals i, per tant, més adients per als càlculs amb l'ordinador.

Recordem de la secció 3 que, si $\mathbb{M}(\Gamma)$ és el subgrup de $H_1(X(\Gamma); \mathbb{R})$ generat pels símbols modulars per a Γ de la forma $\{r, s\}$ amb $r, s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, podem definir un operador vora

$$\begin{aligned} \delta: \mathbb{M}(\Gamma) &\longrightarrow \mathbb{B}(\Gamma) \\ \{r, s\} &\longmapsto \{\pi(s)\} - \{\pi(r)\} \end{aligned}$$

(on $\mathbb{B}(\Gamma)$ és el grup abelià lliure generat per $C(\Gamma)$). En aquesta situació, el nucli $\mathbb{S}(\Gamma)$ de δ és (isomorf a) $H_1(X(\Gamma); \mathbb{Z})$ (vegeu el teorema 18). Els elements de $\mathbb{S}(\Gamma)$ s'anomenen *símbols modulars cuspidals* per a Γ .

Hom podria definir el grup \mathbb{M} dels *símbols modulars formals* com el quocient del grup abelià lliure generat per símbols (formals) de la forma $\{r, s\}$ per a $r, s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ pel subgrup generat pels elements de la forma $\{r, s\} + \{s, t\} + \{t, r\}$ i la torsió. Aquest grup és isomorf al grup de divisors $Z_0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))$ (l'isomorfisme ve donat per $\{r, s\} \mapsto \{s\} - \{r\}$). Aleshores, hom podria presentar els símbols modulars per a Γ com a elements d'aquest grup formal mòdul unes certes relacions (essencialment les de la proposició 15) i definir un operador vora i símbols cuspidals de la mateixa manera.

6 Generalització per a pes $k > 2$

Si $k > 2$, els elements de $S_k(\Gamma)$ ja no corresponen a 1-formes diferencials de $X(\Gamma)$ perquè l'acció de Γ és diferent. Per tal de solucionar-ho, introduïm l'espai de polinomis $\mathbb{Z}[X, Y]_{k-2}$ (çò és, polinomis homogenis de grau $k - 2$ en dues variables

i amb coeficients enters) amb l'acció de $SL_2(\mathbb{Z})$ donada per

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot P(X, Y) = P\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = P(dX - bY, -cX + aY).$$

Ara definim el grup de símbols formals

$$\mathbb{M}_k = \mathbb{Z}[X, Y]_{k-2} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{M}.$$

Els elements de \mathbb{M}_k són de la forma $P \otimes \{r, s\}$ (més ben dit, combinacions \mathbb{Z} -lineals d'aquesta mena de tensors), però normalment escriurem $P\{r, s\}$ en comptes de $P \otimes \{r, s\}$. Hi ha una acció induïda de $SL_2(\mathbb{Z})$ sobre \mathbb{M}_k definida per

$$\alpha \cdot (P \otimes \{r, s\}) = (\alpha \cdot P) \otimes \{\alpha(r), \alpha(s)\}.$$

Definició 23. El grup dels símbols modulars de pes $k \geq 2$ per a Γ és el quocient $\mathbb{M}_k(\Gamma)$ de \mathbb{M}_k pel subgrup generat pels elements $x - \gamma x$ per a $x \in \mathbb{M}_k$ i $\gamma \in \Gamma$ i per la torsió.

Hom pot provar que $\mathbb{M}_k(\Gamma)$ és un grup abelià lliure de rang finit. Donat un anell R qualsevol, escriurem $\mathbb{M}_k(\Gamma, R) = \mathbb{M}_k(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} R$.

En aquesta situació més general també podem definir símbols de Manin $(P, \bar{\alpha})$, per a $P \in \mathbb{Z}[X, Y]_{k-2}$ i $\bar{\alpha} \in \Gamma \setminus SL_2(\mathbb{Z})$, que corresponen als elements $\alpha \cdot P\{0, \infty\}$ de $\mathbb{M}_k(\Gamma)$. Els símbols d'aquesta forma generen tot $\mathbb{M}_k(\Gamma)$. A més a més, hi ha una acció per la dreta de $SL_2(\mathbb{Z})$ sobre els símbols de Manin definida per

$$(P, \bar{\alpha}) \cdot \beta = (\beta^{-1} \cdot P, \bar{\alpha}\beta).$$

Els símbols de Manin satisfan les següents relacions:

- (i) $(P, \bar{\alpha}) + (P, \bar{\alpha})\sigma = 0$,
- (ii) $(P, \bar{\alpha}) + (P, \bar{\alpha})\tau + (P, \bar{\alpha})\tau^2 = 0$ i
- (iii) $(P, \bar{\alpha}) - (P, \bar{\alpha})(-1) = 0$.

De fet, totes les relacions són generades per aquestes, en el sentit que $\mathbb{M}_k(\Gamma)$ és isomorf al quocient del grup abelià lliure generat pels símbols de Manin per aquestes relacions i per la torsió.

Sigui \mathbb{B} el grup abelià lliure generat per $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ i sigui

$$\mathbb{B}_k = \mathbb{Z}[X, Y]_{k-2} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{B}$$

amb l'acció de $SL_2(\mathbb{Z})$ donada per

$$\alpha \cdot (P \otimes s) = (\alpha \cdot P) \otimes \alpha(s).$$

Considerem el quocient $\mathbb{B}_k(\Gamma)$ de \mathbb{B}_k pel subgrup generat pels elements $x - \gamma x$

per a $x \in \mathbb{B}_k$ i $\gamma \in \Gamma$ i per la torsió. Hi ha un operador vora

$$\begin{aligned} \delta: \mathbb{M}_k(\Gamma) &\longrightarrow \mathbb{B}_k(\Gamma) \\ P\{r, s\} &\longmapsto P\{s\} - P\{r\} \end{aligned}$$

(aplicació \mathbb{Z} -lineal) i el seu nucli $\mathbb{S}_k(\Gamma)$ és el subgrup dels *símbols modulars cuspidals* de pes $k \geq 2$ per a Γ .

Teorema 24 (Eichler–Shimura). *L'aparellament*

$$\begin{aligned} (\mathbb{S}_k(\Gamma) \oplus \overline{\mathbb{S}}_k(\Gamma)) \times \mathbb{M}_k(\Gamma) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((f_1, \overline{f_2}), P\{r, s\}) &\longmapsto \int_r^s f_1(z)P(z, 1) dz + \int_r^s \overline{f_2}(z)P(\overline{z}, 1) d\overline{z} \end{aligned}$$

indueix un aparellament

$$(\mathbb{S}_k(\Gamma) \oplus \overline{\mathbb{S}}_k(\Gamma)) \times \mathbb{S}_k(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{C}$$

no degenerat.

Referències

- [1] Koblitz, N. *Introduction to elliptic curves and modular forms*. 2a ed. Graduate texts in mathematics 97. Nova York, NY, EUA: Springer–Verlag, 1993. Cap. III, pàg. 98–175.
- [2] Lang, S. *Introduction to modular forms*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 222. Berlín, Germany: Springer–Verlag, 1995. Cap. IV, pàg. 57–67. Reimpressió corregida de l'original de 1976.
- [3] Manin, Y. I. «Parabolic points and zeta–functions of modular curves». Trad. de Koblitz, N. A: *Math. USSR-Izv.* 6.1 (1972), pàg. 19–64.
- [4] Milne, J. S. *Modular functions and modular forms (v1.31)*. Notes d'un curs. 2012. Cap. I, pàg. 13–85. URL: <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/mf.html> (cons. 11-05-2019).
- [5] Serre, J.-P. *A course in arithmetic*. Ang. Graduate texts in mathematics 7. Nova York, NY, EUA: Springer–Verlag, 1973. Cap. VII, pàg. 77–111.
- [6] Stein, W. A. *Modular forms, a computational approach*. Graduate studies in mathematics 79. Providence, RI, EUA: American Mathematical Society, 2007. Cap. 3, pàg. 35–61. URL: <http://wstein.org/books/modform/> (cons. 11-05-2019).